MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 9
18.12.2019

# Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“

1. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad f(x, y) = (3x - 4y, 4x - 5y)$$

bijektiv ist, und geben Sie die Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ explizit an.

2. Gegeben seien die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad f(x, y) = (x - y, xy)$$

und

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad g(u, v) = \left( \frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}},\ -\frac{u}{2} + \sqrt{v + \frac{u^2}{4}} \right).$$

Zeigen Sie, daß $f$ bijektiv mit $f^{-1} = g$ ist.

3. Untersuchen Sie für die folgenden Wahlen einer Menge $N$, eines Elements $n_0 \in N$ und einer Abbildung $\nu : N \to N$, ob $(N, n_0, \nu)$ eine Peanostruktur ist. Welche der drei definierenden Eigenschaften einer Peanostruktur sind erfüllt, welche nicht?

   a) $N = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $n_0 = 0$, und $\nu$ gegeben durch

$$\nu(n) = \begin{cases} n + 1 & \text{falls } 0 \leq n < 4, \\ 0 & \text{falls } n = 4. \end{cases}$$

   b) $N = \{A, B, C, D, E, F\}$, $n_0 = A$, und $\nu$ gegeben durch die Wertetabelle

| $n$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\nu(n)$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $C$ |

.

4. a) i) Bestimmen Sie für $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ die Summe $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$ der ersten $n$ ungeraden Zahlen. Welche Vermutung liegt nahe?

   ii) Beweisen Sie die unter i) vermutete Formel für die Summe $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mittels vollständiger Induktion.

   b) *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2019, Thema 1, Aufgabe 1a))*
   Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \ = \ \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1).$$

**Für die Tutorien vom 18.12. bis 20.12.19**